



Departamento de Computación
Universidade da Coruña

Bisimulación y procesos concurrentes
Tema 2: Los Autómatas y su Comportamiento

Carmen Alonso Montes
carmen@dc.fi.udc.es

Noelia Barreira Rodríguez
noelia@dc.fi.udc.es

19 de febrero de 2004

Definición de Autómata

Autómata Sea un conjunto de acciones Act , denominado alfabeto, un autómata A sobre Act consta de:

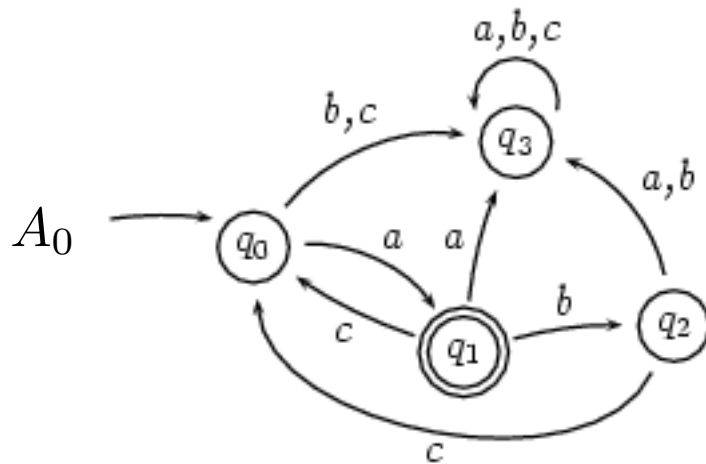
- un conjunto $Q = \{q_0, q_1, \dots\}$ de estados;
- un estado $q_0 \in Q$ denominado *estado inicial*;
- un subconjunto \mathcal{F} de Q con los estados *finales* o de *aceptación*
- un subconjunto \mathcal{T} de $Q \times Act \times Q$, denominado *transiciones*

Una transición $(q, a, q') \in \mathcal{T}$ normalmente se escribe $q \xrightarrow{a} q'$.

El autómata A se dice que es de *estados finitos* si Q es finito y *determinista* si por cada par $(q, a) \in Q \times Act$ existe únicamente una transición $q \xrightarrow{a} q'$.

Representación de Autómatas

- *Grafo de transiciones*
 - Nodos \rightarrow estados
 - Arcos \rightarrow transiciones
- Ejemplo:



$$\begin{aligned} Act &= \{a, b, c\} \\ Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\ \mathcal{F} &= \{q_1\} \end{aligned}$$

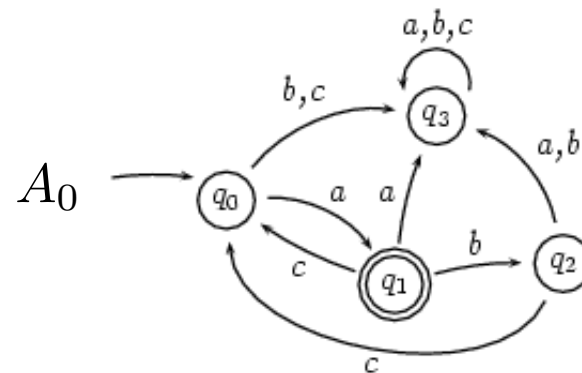
Lenguaje de un Autómata

Lenguaje de un Autómata Sea A un autómata sobre Act y $s = a_1 \dots a_n$ una cadena sobre Act . Se dice que A acepta s si existe un camino en A , desde q_0 a un estado de aceptación, cuyos arcos estén etiquetados sucesivamente por a_1, \dots, a_n .

El lenguaje de A , denotado por \hat{A} , es el conjunto de cadenas aceptadas por A .

■ Ejemplo:

- Cadena aceptada: $abca$
- Camino: $q_0q_1q_2q_0q_1$



Conjuntos regulares

- Operaciones sobre conjuntos de cadenas:
 - Unión: $S_1 \cup S_2$
 - Concatenación: $S_1 \cdot S_2 = \{s_1s_2 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$
 - Iteración: $S^* = \{\epsilon\} \cup S \cup S \cdot S \cup S \cdot S \cdot S \cup \dots$
($s_1s_2 \dots s_n$ ($n \geq 0$), tal que $s_i \in S, \forall i$)

Conjunto regular Un conjunto de cadenas sobre Act se dice que es *regular* si puede ser construido a partir del conjunto vacío \emptyset y los conjuntos unitarios $\{a\}$ (para cada $a \in Act$), utilizando sólo las operaciones de *unión*, *concatenación* e *iteración*.

Propiedades de la Concatenación y Regla de Arden

■ Propiedades de la concatenación

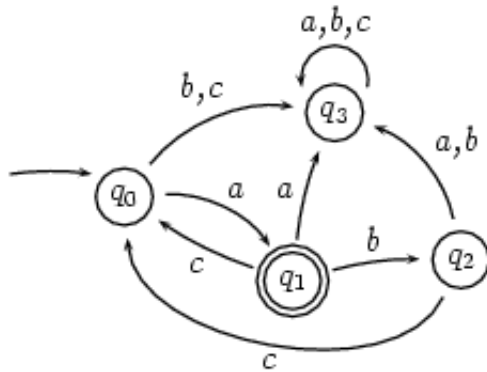
- $(S_1 \cdot S_2) \cdot S_3 = S_1 \cdot (S_2 \cdot S_3)$
- $(S_1 + S_2) \cdot T = S_1 \cdot T + S_2 \cdot T$
- $T \cdot (S_1 + S_2) = T \cdot S_1 + T \cdot S_2$
- $S \cdot \epsilon = S$
- $S \cdot \emptyset = \emptyset$
- $S \cdot (T \cdot S)^* = (S \cdot T)^* \cdot S$

Regla de Arden Para cualesquiera conjuntos de cadenas S y T , la ecuación $X = S \cdot X + T$ tiene como solución $X = S^* \cdot T$.

Además, esta solución es única si $\epsilon \notin S$.

Lenguaje de un Autómata

- Se obtiene a partir de las propiedades anteriores y la regla de Arden



Lenguaje de un Autómata

- Se obtiene a partir de las propiedades anteriores y la regla de Arden

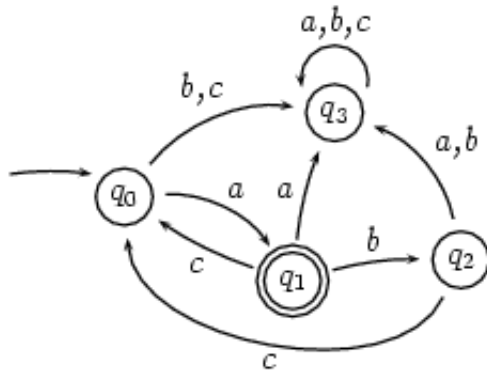
1. Sistema de ecuaciones:

$$X_0 = aX_1 + bX_3 + cX_3$$

$$X_1 = aX_3 + bX_2 + cX_0 + \epsilon$$

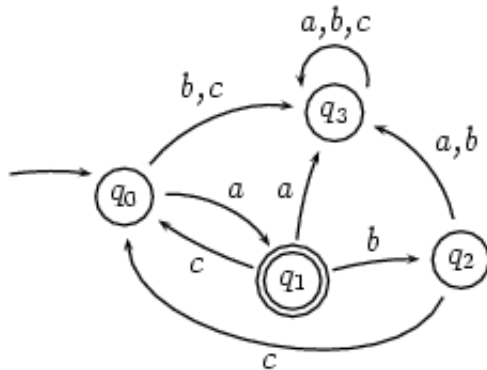
$$X_2 = aX_3 + bX_3 + cX_0$$

$$X_3 = aX_3 + bX_3 + cX_3$$



Lenguaje de un Autómata

- Se obtiene a partir de las propiedades anteriores y la regla de Arden



- Sistema de ecuaciones:

$$X_0 = aX_1 + bX_3 + cX_3$$

$$X_1 = aX_3 + bX_2 + cX_0 + \epsilon$$

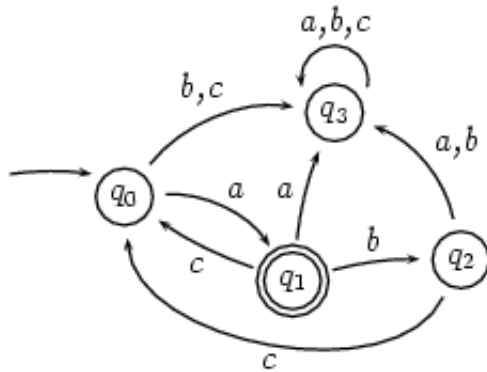
$$X_2 = aX_3 + bX_3 + cX_0$$

$$X_3 = aX_3 + bX_3 + cX_3$$

- Regla de Arden: $X_3 = (a + b + c)^* \emptyset = \emptyset$

Lenguaje de un Autómata

- Se obtiene a partir de las propiedades anteriores y la regla de Arden



- Sistema de ecuaciones:

$$X_0 = aX_1 + bX_3 + cX_3$$

$$X_1 = aX_3 + bX_2 + cX_0 + \epsilon$$

$$X_2 = aX_3 + bX_3 + cX_0$$

$$X_3 = aX_3 + bX_3 + cX_3$$

- Regla de Arden: $X_3 = (a + b + c)^* \emptyset = \emptyset$

- Simplificando:

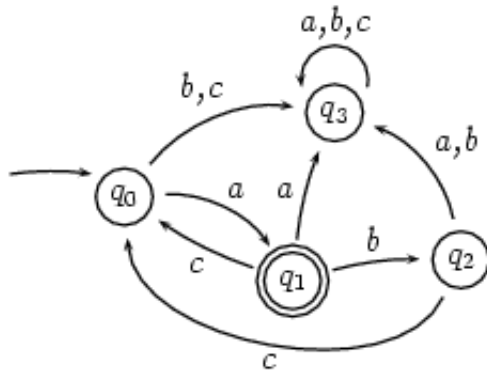
$$X_0 = aX_1$$

$$X_1 = bX_2 + cX_0 + \epsilon$$

$$X_2 = cX_0$$

Lenguaje de un Autómata

- Se obtiene a partir de las propiedades anteriores y la regla de Arden



1. Sistema de ecuaciones:

$$X_0 = aX_1 + bX_3 + cX_3$$

$$X_1 = aX_3 + bX_2 + cX_0 + \epsilon$$

$$X_2 = aX_3 + bX_3 + cX_0$$

$$X_3 = aX_3 + bX_3 + cX_3$$

2. Regla de Arden: $X_3 = (a + b + c)^* \emptyset = \emptyset$

3. Simplificando:

$$X_0 = aX_1$$

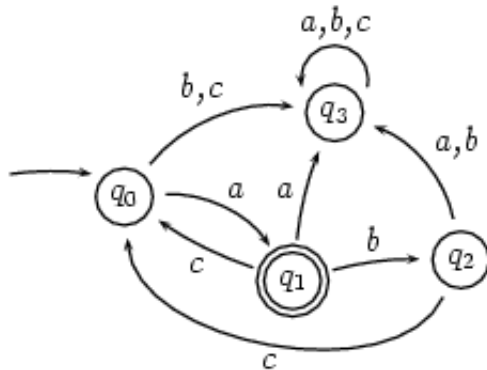
$$X_1 = bX_2 + cX_0 + \epsilon$$

$$X_2 = cX_0$$

4. Sustituyendo: $X_1 = (bc + c)aX_1 + \epsilon$

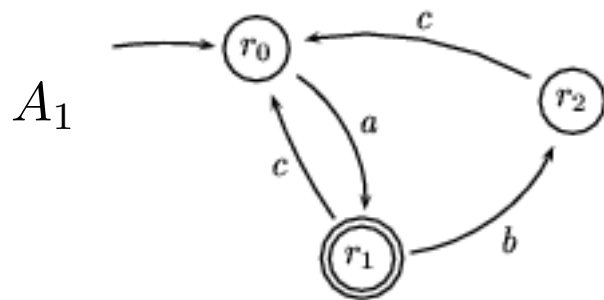
Lenguaje de un Autómata

- Se obtiene a partir de las propiedades anteriores y la regla de Arden

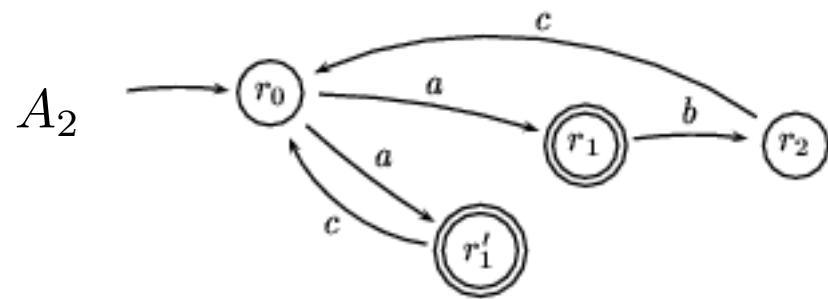


- Sistema de ecuaciones:
$$X_0 = aX_1 + bX_3 + cX_3$$
$$X_1 = aX_3 + bX_2 + cX_0 + \epsilon$$
$$X_2 = aX_3 + bX_3 + cX_0$$
$$X_3 = aX_3 + bX_3 + cX_3$$
- Regla de Arden: $X_3 = (a + b + c)^* \emptyset = \emptyset$
- Simplificando:
$$X_0 = aX_1$$
$$X_1 = bX_2 + cX_0 + \epsilon$$
$$X_2 = cX_0$$
- Sustituyendo: $X_1 = (bc + c)aX_1 + \epsilon$
- Regla de Arden: $\widehat{A}_0 = X_0 = a((bc + c)a)^*$

Determinismo vs. No Determinismo

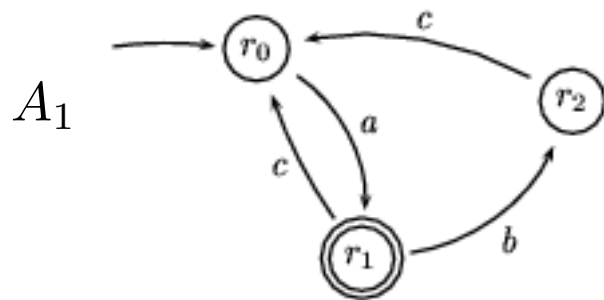


Determinista



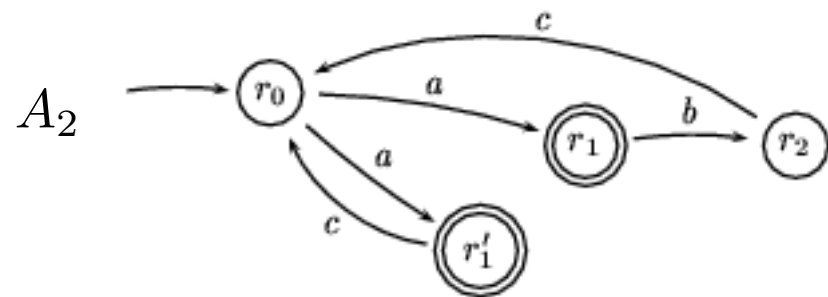
No determinista

Determinismo vs. No Determinismo



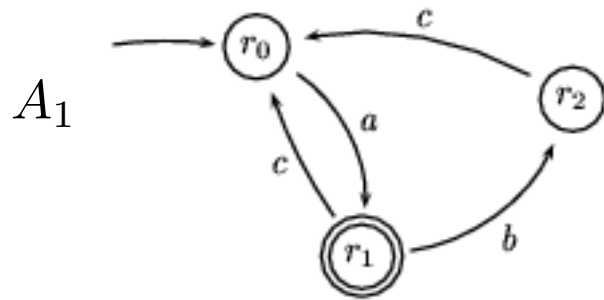
Determinista

$$\widehat{A}_1 = a((bc + c)a)^*$$



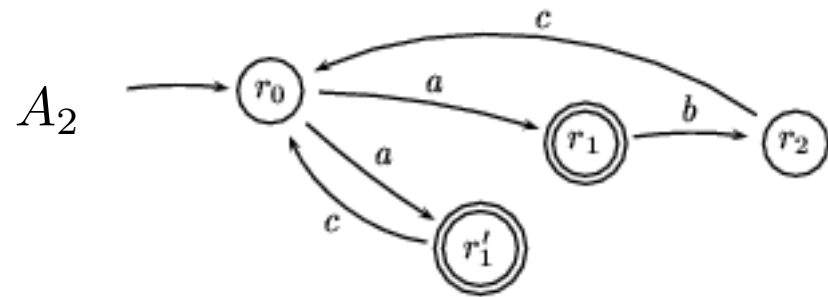
No determinista

Determinismo vs. No Determinismo



Determinista

$$\widehat{A}_1 = a((bc + c)a)^*$$



No determinista

$$\widehat{A}_2 = (a(bc + c))^*a$$

Sistemas Reactivos (I)

Cierre-prefijo Si una cadena s puede ser expresada de la forma s_1s_2 , entonces se dice que s_1 es un prefijo de s .

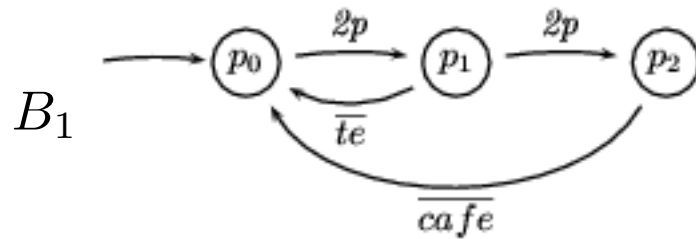
- Un lenguaje S se dice que es de *prefijo-cerrado*, si para cualquier $ss' \in S$ entonces $s \in S$.
- El *cierre-prefijo* de un lenguaje S es el lenguaje más largo $Pref(S)$ que contiene todos los prefijos de cada cadena de S . Es el el lenguaje cierre-prefijo más pequeño que incluye S .

Por ejemplo, si $S = \{a, bcd\}$ entonces su cierre-prefijo es $Pref(S) = \{\epsilon, a, b, bc, bcd\}$

- Para cualquier autómata A , en el que todos sus estados sean de aceptación, \widehat{A} es un lenguaje *prefijo-cerrado*

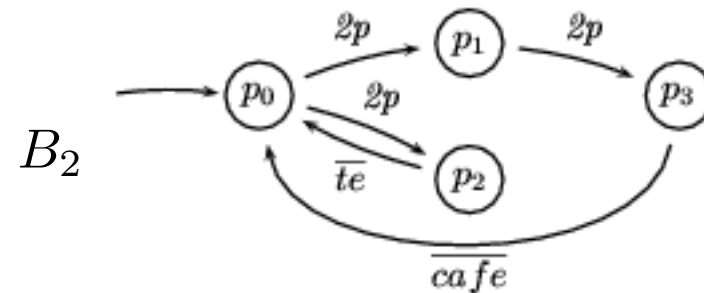
Sistemas Reactivos (II)

Ejemplos de posibles autómatas en una máquina de café:



Determinista

$$\widehat{B1} = (2p (2p \overline{cafe} + \overline{te}))^*$$



No determinista

$$\widehat{B2} = (2p (2p \overline{cafe} + \overline{te}))^*$$

Conclusiones

En el ejemplo anterior se tenía que $\widehat{B1} = \widehat{B2}$

- Se ha usado una de las formas de la *segunda ley distributiva*:

$$2p (\overline{te} + 2p \overline{cafe}) = 2p \overline{te} + 2p 2p \overline{cafe}$$

- Esta noción de equivalencia no es adecuada para situaciones en las que las acciones del autómata consisten en *reacciones*, ya que no respeta el *no determinismo*