Departamento de Computación
Universidade da Coruña

Bisimulación y procesos concurrentes

Tema 3: Procesos secuenciales y bisimulación

Carmen Alonso Montes
carmen@dc.fi.udc.es

Noelia Barreira Rodríguez
noelia@dc.fi.udc.es

19 de febrero de 2004

Sistemas de transición etiquetados

Sistema de transición etiquetado Un sistema de transición etiquetado (LTS) sobre Act es un par $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ consistente en

- un conjunto $\mathcal{Q}$ de estados
- una relación ternaria $\mathcal{T} \subseteq (\mathcal{Q} \times Act \times \mathcal{Q})$, conocida como una *relación de transición*

$(q, \alpha, q') \in \mathcal{T}$ se representará como $q \xrightarrow{\alpha} q'$, y llamaremos a q *fuente* y a q' *destino* de la transición.

Si $q \xrightarrow{\alpha_1} q_1 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \xrightarrow{\alpha_n} q_n$, entonces llamaremos a q_n *derivado* de q bajo $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$

- Un LTS puede ser visto como un autómata sin estados inicial y final

Simulación fuerte (I)

Simulación fuerte Sea $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ un LTS, y sea S una relación binaria sobre $\mathcal{Q}$. Entonces S se denonima una *simulación fuerte* sobre $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$, si, para cualquier pSq,

- si $p \xrightarrow{\alpha} p'$ entonces existe $q' \in \mathcal{Q}$ tal que $q \xrightarrow{\alpha} q'$ y $p'Sq'$.

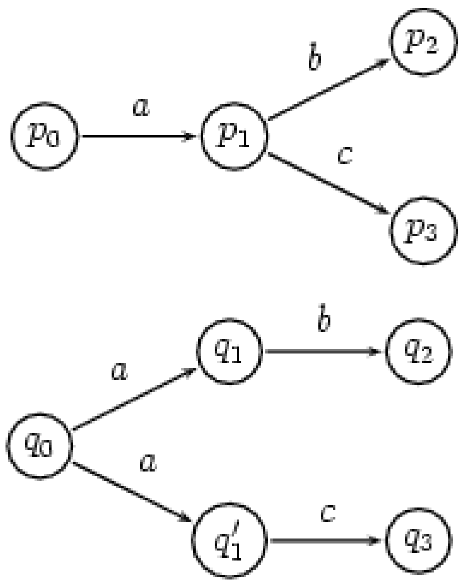
Decimos que q *simula fuertemente* p si existe una simulación fuerte S tal que pSq.

Gráficamente:

$$\text{si} \quad \begin{array}{ccc} p & S & q \\ \downarrow^{\alpha} & & \\ p' & & \end{array} \qquad \text{entonces, para algún } q', \qquad \begin{array}{ccc} & & q \\ & & \downarrow^{\alpha} \\ p' & S & q' \end{array}$$

Simulación fuerte (II)

Ejemplo:

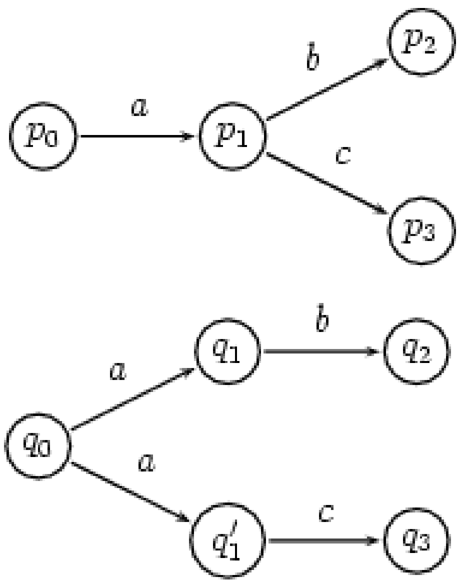


- Simulación fuerte:

$$\mathcal{S} = \{(q_0, p_0), (q_1, p_1), (q_1', p_1), (q_2, p_2), (q_3, p_3)\}$$

Simulación fuerte (II)

Ejemplo:



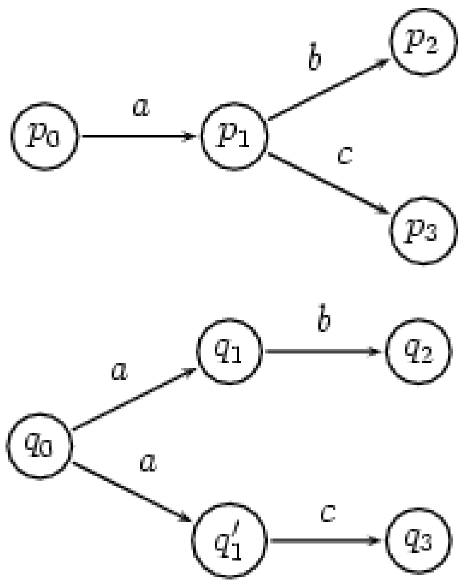
- Simulación fuerte:

$$\mathcal{S} = \{(q_0, p_0), (q_1, p_1), (q_1', p_1), (q_2, p_2), (q_3, p_3)\}$$

- Comprobación:
  - $(q_0, p_0) \in \mathcal{S}$ y $q_0 \xrightarrow{a} q_1$, además $p_0 \xrightarrow{a} p_1$ y $(q_1, p_1) \in \mathcal{S}$

Simulación fuerte (II)

Ejemplo:



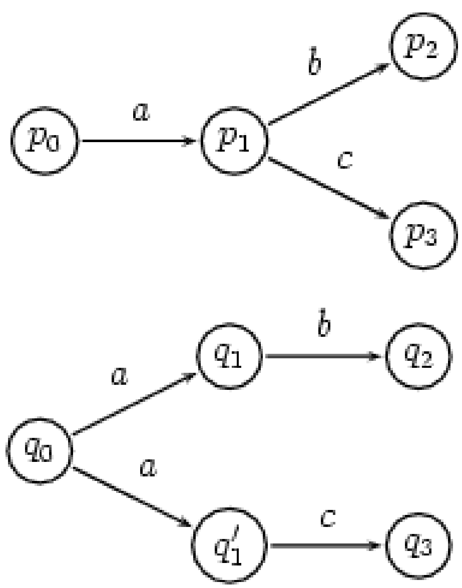
- Simulación fuerte:

$$\mathcal{S} = \{(q_0, p_0), (q_1, p_1), (q_1', p_1), (q_2, p_2), (q_3, p_3)\}$$

- Comprobación:
  - $(q_0, p_0) \in \mathcal{S}$ y $q_0 \xrightarrow{a} q_1$, además $p_0 \xrightarrow{a} p_1$ y $(q_1, p_1) \in \mathcal{S}$
  - $(q_0, p_0) \in \mathcal{S}$ y $q_0 \xrightarrow{a} q_1'$, además $p_0 \xrightarrow{a} p_1$ y $(q_1', p_1) \in \mathcal{S}$

Simulación fuerte (II)

Ejemplo:



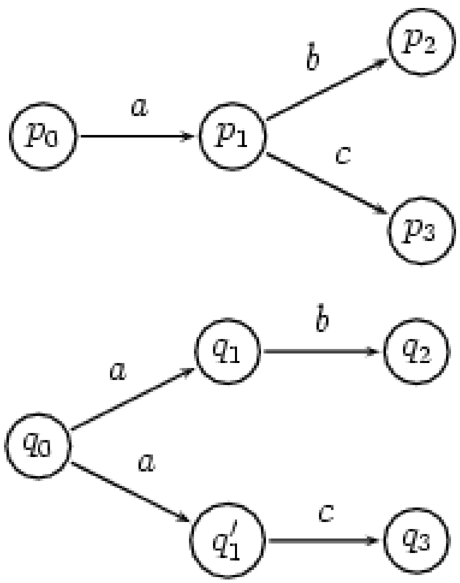
- Simulación fuerte:

$$\mathcal{S} = \{(q_0, p_0), (q_1, p_1), (q_1', p_1), (q_2, p_2), (q_3, p_3)\}$$

- Comprobación:
  - $(q_0, p_0) \in \mathcal{S}$ y $q_0 \xrightarrow{a} q_1$, además $p_0 \xrightarrow{a} p_1$ y $(q_1, p_1) \in \mathcal{S}$
  - $(q_0, p_0) \in \mathcal{S}$ y $q_0 \xrightarrow{a} q_1'$, además $p_0 \xrightarrow{a} p_1$ y $(q_1', p_1) \in \mathcal{S}$
  - $(q_1, p_1) \in \mathcal{S}$ y $q_1 \xrightarrow{b} q_2$, además $p_1 \xrightarrow{b} p_2$ y $(q_2, p_2) \in \mathcal{S}$

Simulación fuerte (II)

Ejemplo:



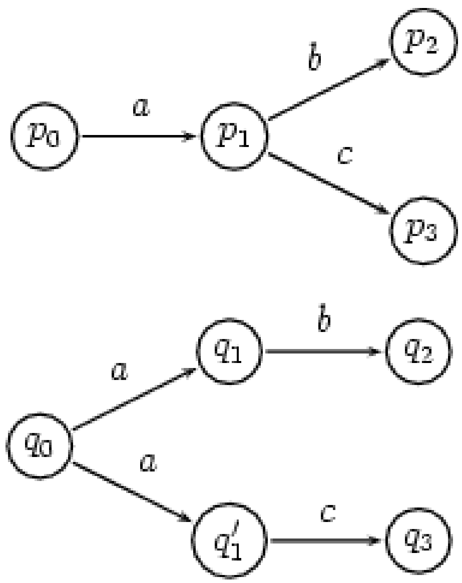
- Simulación fuerte:

$$\mathcal{S} = \{(q_0, p_0), (q_1, p_1), (q_1', p_1), (q_2, p_2), (q_3, p_3)\}$$

- Comprobación:
  - $(q_0, p_0) \in \mathcal{S}$ y $q_0 \xrightarrow{a} q_1$, además $p_0 \xrightarrow{a} p_1$ y $(q_1, p_1) \in \mathcal{S}$
  - $(q_0, p_0) \in \mathcal{S}$ y $q_0 \xrightarrow{a} q_1'$, además $p_0 \xrightarrow{a} p_1$ y $(q_1', p_1) \in \mathcal{S}$
  - $(q_1, p_1) \in \mathcal{S}$ y $q_1 \xrightarrow{b} q_2$, además $p_1 \xrightarrow{b} p_2$ y $(q_2, p_2) \in \mathcal{S}$
  - $(q_1', p_1) \in \mathcal{S}$ y $q_1' \xrightarrow{c} q_3$, además $p_1 \xrightarrow{c} p_3$ y $(q_3, p_3) \in \mathcal{S}$

Simulación fuerte (y III)

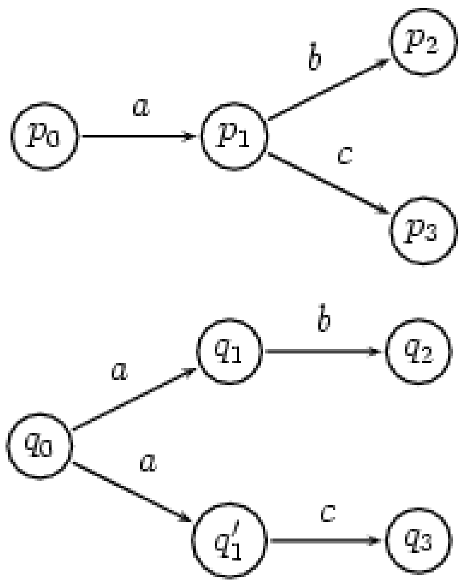
Ejemplo:



- Simulación fuerte inversa $\mathcal{R}$:
  - $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0)\}$

Simulación fuerte (y III)

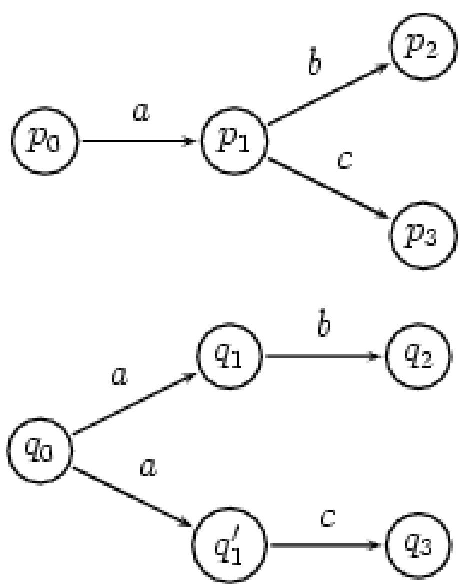
Ejemplo:



- Simulación fuerte inversa $\mathcal{R}$:
  - $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0)\}$
  - (p_0, q_0) y $p_0 \xrightarrow{a} p_1$, además $q_0 \xrightarrow{a} q_1$
    $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0), (p_1, q_1)\}$

Simulación fuerte (y III)

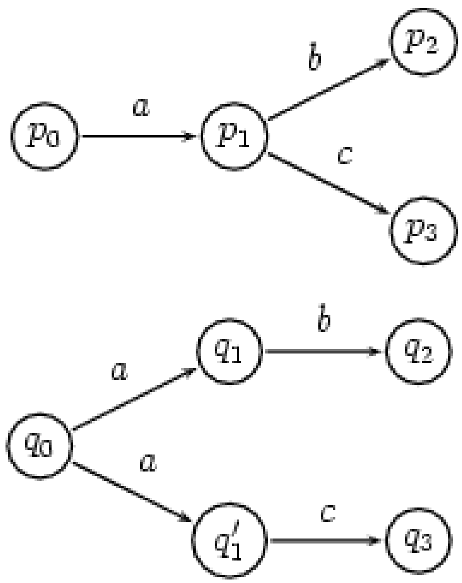
Ejemplo:



- Simulación fuerte inversa $\mathcal{R}$:
  - $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0)\}$
  - (p_0, q_0) y $p_0 \xrightarrow{a} p_1$, además $q_0 \xrightarrow{a} q_1$
    $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0), (p_1, q_1)\}$
  - (p_1, q_1) y $p_1 \xrightarrow{b} p_2$, además $q_1 \xrightarrow{b} q_2$
    $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0), (p_1, q_1), (p_2, q_2)\}$

Simulación fuerte (y III)

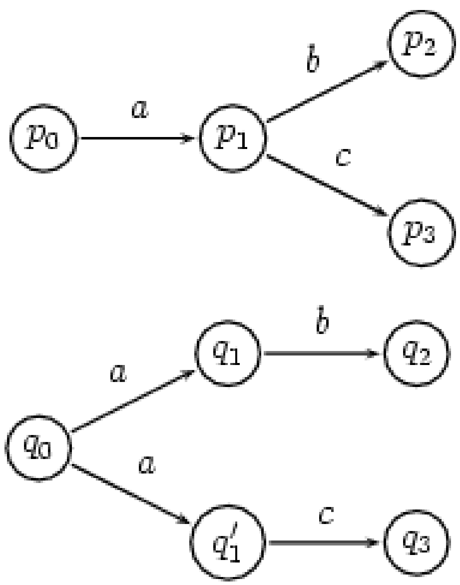
Ejemplo:



- Simulación fuerte inversa $\mathcal{R}$:
  - $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0)\}$
  - (p_0, q_0) y $p_0 \xrightarrow{a} p_1$, además $q_0 \xrightarrow{a} q_1$
    $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0), (p_1, q_1)\}$
  - (p_1, q_1) y $p_1 \xrightarrow{b} p_2$, además $q_1 \xrightarrow{b} q_2$
    $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0), (p_1, q_1), (p_2, q_2)\}$
  - (p_1, q_1) y $p_1 \xrightarrow{c} p_3$, pero $q_1 \xrightarrow{c} ???$

Simulación fuerte (y III)

Ejemplo:



- Simulación fuerte inversa $\mathcal{R}$:
  - $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0)\}$
  - (p_0, q_0) y $p_0 \xrightarrow{a} p_1$, además $q_0 \xrightarrow{a} q_1$
    $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0), (p_1, q_1)\}$
  - (p_1, q_1) y $p_1 \xrightarrow{b} p_2$, además $q_1 \xrightarrow{b} q_2$
    $\mathcal{R}_{temp} = \{(p_0, q_0), (p_1, q_1), (p_2, q_2)\}$
  - (p_1, q_1) y $p_1 \xrightarrow{c} p_3$, pero $q_1 \xrightarrow{c} ???$
- No existe una simulación fuerte que contenga (p_1, q_1)
  - Una transición de p_1 nunca puede ser *simulada* por $q1$

Bisimulación Fuerte (I)

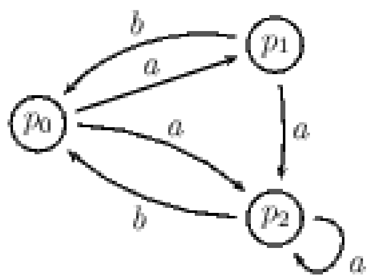
Definiciones

- La Inversa, R^{-1}, de cualquier relación binaria R, está formado por el conjunto de pares (y, x) tales que $(x, y) \in R$
- **Bisimulación fuerte**: Una relación binaria S sobre $\mathcal{Q}$ se dice que es una *bisimulación fuerte* sobre el $LTS(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ si S y su inversa S^{-1}, son ambas simulaciones
- **Equivalencia fuerte**: Se dice que p y q tienen *equivalencia fuerte*, $p \sim q$, si existe una bisimulación fuerte S tal que se cumpla pSq

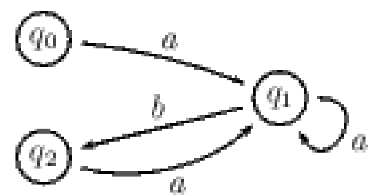
Bisimulación fuerte (y II)

Ejemplo:

A_1



A_2



- Dado $S = \{(p_0, q_0), (p_0, q_2), (p_1, q_1), (p_2, q_1)\}$
- S es una **bisimulación** ya que $p_0 S q_0$.

Propiedades de la bisimulación

- La relación $\sim$ es una relación de *equivalencia* lo que implica que se cumplen las propiedades de:
  - **Reflexiva**: $p \sim p$
  - **Simetría**: $p \sim q \Rightarrow q \sim p$
  - **Transitividad**: $p \sim q \;\wedge\; q \sim r \Rightarrow p \sim r$

- La relación $\sim$ es en si misma una $bisimulación\ fuerte$

Propiedades de la bisimulación: Demostración

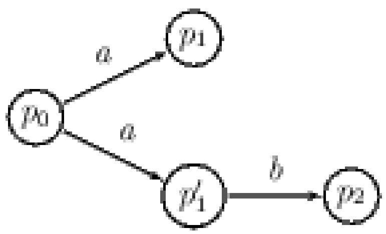
- $\sim$ es una relación de *equivalencia*, y se demuestra mediante:
  - **Reflexiva**: se parte de la condición $Id_{\mathcal{Q}} = \{(p, p) | p \in \mathcal{Q}\}$
  - **Simetría**: Si S es una bisimulación entonces lo es su inversa S^{-1}
  - **Transitividad**: Siendo S_1 y S_2 bisimulaciones, sería suficiente demostrar que $S_1 S_2 = \{(p, r) | \exists q,\ pS_1 q \wedge qS_2 r\}$ es una simulación

- $\sim$ es por si misma una $bisimulación\ fuerte$

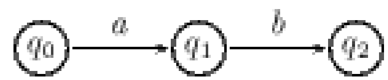
Interbloqueo

En este ejemplo se muestra el hecho de que $p \not\sim q$, donde p puede quedar en un interbloqueo.

A_1



A_2



$S_{A_1} = \{(p_0, q_0), (p_1, q_1), (p'_1, q_1), (p_2, q_2)\}$ $\quad$ $S_{A_2} = \{(q_0, p_0), (q_1, p'_1), (q_2, p_2)\}$

$p \not\sim q$ ya que se tiene que en S^{-1}, el par $(q_1, p_1) \notin S$