



Departamento de Computación  
Universidade da Coruña

---

# Bisimulación y procesos concurrentes

## Tema 4: Procesos Concurrentes y Reacción

---

Carmen Alonso Montes  
carmen@dc.fi.udc.es

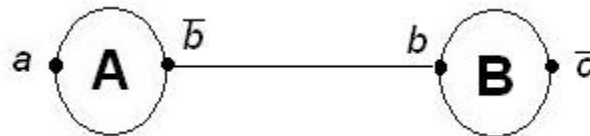
Noelia Barreira Rodríguez  
noelia@dc.fi.udc.es

Laura Fidalgo Fernández  
fidalgofdez@mundo-r.com

## Procesos concurrentes y reacciones

---

- Hacemos distinción entre las acciones de un sistema concurrente que son *observables externamente e internamente*.
- Un grafo de flujo representa la **estructura** de un sistema, no sus propiedades **dinámicas**.
- Si  $B$  tiene botones etiquetados  $b, \bar{c}$ , entonces el sistema conteniendo ambos  $A$  y  $B$  se dibujaría:



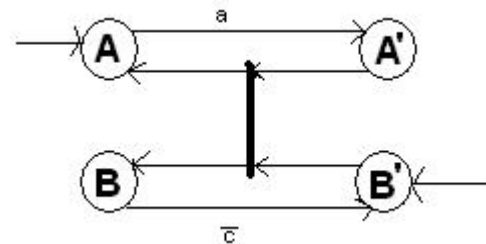
## Observaciones y Reacciones

---

- Representamos dos sistemas  $A$  y  $B$  ejecutándose concurrentemente, con una acción sincronizada  $b$
- Para nosotros serán equivalentes los conceptos de *interacción* y *observación* y *acción interna* y *reacción*
- La clase de acciones consta de  $Act = \mathcal{L} \cup \{\tau\}$

$$\begin{aligned} A &\stackrel{def}{=} a.A' \\ A' &\stackrel{def}{=} \bar{b}.A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &\stackrel{def}{=} b.B' \\ B' &\stackrel{def}{=} \bar{c}.B \end{aligned}$$



## Expresiones de procesos concurrentes

---

- $\sum_{i \in I} \alpha_i.P_i$  había sido hasta ahora nuestro único proceso de construcción.

**Expresión de procesos concurrentes** La colección  $P$  de expresiones de procesos es definida con la siguiente sintaxis:

$$P ::= A \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid \sum_{i \in I} \alpha_i.P_i \mid P_1 \mid P_2 \mid \text{new } a \ P$$

donde  $I$  es una colección finita.

- El orden de los términos es insignificante.
- Las operaciones  $\alpha$  y  $\text{new } a$  tienen mayor precedencia que el sumatorio y la composición
- A menudo se omite  $\cdot 0$ ;
- También, escribiremos  $\text{new } a, b \ P$  o  $\text{new } ab \ P$  para  $\text{new } a \ \text{new } b \ P$ .

## Expresiones de procesos concurrentes

---

- En una rescripción  $new\ a\ P$   $a$  es un nombre ligado.
- $fn(P)$  es la colección de todos los nombres no ligados o libres, en  $P$ .
- **Alpha-conversión** Cambiar un nombre ligado a un nuevo nombre
- Dos términos son estructuralmente congruentes si uno de ellos es derivado del otro por *alfa-conversión*
- Ejemplo:

$$(new\ b)\ ab = (new\ b')ab'$$

$$P = (new\ b)ab\ \text{entonces}\ \{b/a\}P = (new\ b')bb'$$

## Expresiones de procesos concurrentes

---

- Cada proceso  $A$  se puede definir como  $A(a) = P_A$ , donde
  - $a$  es una lista de  $fn(P_A)$ .
  - $P_A$  puede ser un sumatorio.
- Ejemplos de reacciones ocurriendo en un proceso  $P$ , llevando a un nuevo estado  $P'$ .
- Escribimos cada reacción como  $P \rightarrow P'$ .

## Expresiones de procesos concurrentes

---

### ■ Ejemplos:

- Si  $P = \bar{b}.A|b.B'$ , puede ocurrir una reacción entre  $b$  y  $\bar{b}$ . Así,

$$P \rightarrow A|B'$$

- Sea  $P = new\ a((a.Q_1 + b.Q_2)|\bar{a},0)|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2)$

$$P \rightarrow new\ aQ_1|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2)$$

$$P \rightarrow new\ a(Q_2|\bar{a})|R_1$$

- $\bar{a}R_2$  no está en el ámbito de la restricción  $new\ a$
- No se cumple  $P \rightarrow new\ a(Q_1|\bar{a})|R_2$ .

## Expresiones de procesos concurrentes

---

- $new\ a\ P$  puede verse como una declaración local de  $a$  en  $P$
- Se permite que un nombre ligado sea cambiado por otro nuevo
- El nuevo nombre no puede estar ya en la expresión considerada
- Cambiando el nombre local  $a$  a un nuevo nombre  $a'$ ,  $P$  quedaría:

$$P = new\ a'((a'Q'_1 + bQ'_2)|\bar{a}'|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2))$$

## Contexto de un Proceso

---

**Contexto de un Proceso** Un *contexto de un proceso*  $\mathcal{C}$ , informalmente hablando, es la expresión de un proceso que contiene un *hueco*. Desde el punto de vista formal, el contexto de un proceso viene dado por la siguiente sintaxis:

$$\mathcal{C} ::= [] \mid \alpha.\mathcal{C} + M \mid \text{new } a \mathcal{C} \mid \mathcal{C}|P \mid P|\mathcal{C}$$

$\mathcal{C}[Q]$  denota el resultado de rellenar el hueco en el contexto  $\mathcal{C}$  con el proceso  $Q$ .

Los contextos elementales son:

$$\begin{array}{cc} \alpha.[] + M & \text{new } a [] \\ []|P & P|[] \end{array}$$

## Congruencia de un Proceso

---

**Congruencia de un proceso** Sea  $\cong$  una relación de equivalencia sobre  $P$ . Se dice que  $\cong$  es la *congruencia de un proceso* si se mantiene para todos los contextos elementales, es decir, si  $P \cong Q$  entonces

$$\begin{aligned}\alpha.P + M &\cong \alpha.Q + M \\ \text{new } a P &\cong \text{new } a Q \\ P|R &\cong Q|R \\ R|P &\cong R|Q\end{aligned}$$

- Consecuencia:

Una relación de equivalencia arbitraria  $\cong$  es la congruencia de un proceso si y sólo si, para todos los contextos  $\mathcal{C}$ ,  $P \cong Q$  implica  $\mathcal{C}[P] \cong \mathcal{C}[Q]$

# Congruencia estructural

---

**Congruencia estructural** La *congruencia estructural*,  $\equiv$ , es la congruencia de proceso sobre  $P$  determinada por las siguientes ecuaciones:

1. Cambio de las variables ligadas (*alfa-conversión*)
2. Reordenamiento de los términos de un sumatorio
3.  $P|0 \equiv P$ ,  $P|Q \equiv Q|P$ ,  $P|(Q|R) \equiv (P|Q)|R$
4.  $\text{new } a (P|Q) \equiv P|\text{new } a Q$  si  $a \notin \text{fn}(P)$   
 $\text{new } a 0 \equiv 0$ ,  $\text{new } ab P \equiv \text{new } ba P$
5.  $A < \vec{b} > \equiv \{ \vec{b} / \vec{a} \} P_A$  si  $A(\vec{a}) \stackrel{\text{def}}{=} P_A$

## Forma estándar

---

**Forma estándar** Una expresión de un proceso  $\text{new } \vec{a} (M_1 | \dots | M_n)$ , donde cada  $M_i$  es una suma no vacía se dice que está en *forma estándar*.

Si  $n = 0$ ,  $M_1 | \dots | M_n$  son 0

Si  $\vec{a}$  está vacía no hay ninguna restricción

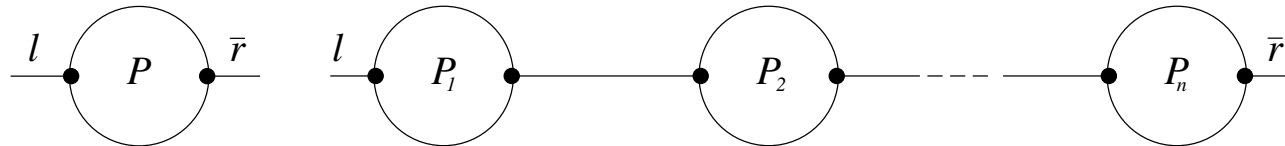
**Teorema** Cada proceso es estructuralmente congruente con una forma estándar

Cualquier restricción  $\text{new } a$  que no esté dentro de una suma se puede llevar a lo más externo utilizando una alfa-conversión si es necesario seguida de una regla  $P | \text{new } a Q \equiv \text{new } a (P | Q)$  en conjunción con otras reglas de la congruencia estructural.

## Ejemplo: links (I)

---

- Sea un proceso  $P$  con dos puertos  $l$  y  $r$ :



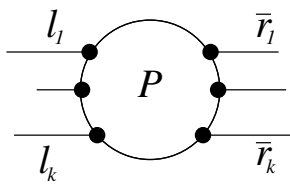
- Se define un operador binario de encadenamiento:

$$P \frown Q \stackrel{def}{=} new\ m(\{m/r\}P|\{m/l\}Q)$$

donde  $m$  está ligado en  $P$  y en  $Q$

## Ejemplo: links (y II)

- Generalizando:



$P \frown Q \stackrel{def}{=} new \vec{m}(\{\vec{m}/\vec{r}\}P|\{\vec{m}/\vec{l}\}Q)$   
 donde los miembros de  $\vec{m}$  son distintos y están ligados en  $P$  y  $Q$

- Uso:

- Dado un dominio de datos finito  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
- $\vec{l}$  es un puerto que transmite un valor  $v \in V$

- $\frown$  es asociativo:

$$P \frown (Q \frown R) \equiv (P \frown Q) \frown R$$

## Reglas de Reacción

---

**Reacción** : Una relación de reacción  $\rightarrow$  sobre  $P$  contiene exactamente aquellas transiciones que pueden ser inferidas de las reglas que se muestran a continuación

■ **TAU**:  $\tau.P + M \rightarrow P$

■ **REACT**:  $(a.P + M) | (\bar{a}.Q + N) \rightarrow P | Q$

■ **PAR**:  $\frac{P \rightarrow P'}{P | Q \rightarrow P' | Q}$       **RES**:  $\frac{P \rightarrow P'}{\text{new } aP \rightarrow \text{new } aP'}$

■ **STRUCT**:  $\frac{P \rightarrow P'}{Q \rightarrow Q'}$  si  $P \equiv Q$  y  $P' \equiv Q'$

## Ejemplos Prácticos

---

- Inferir las reacciones del proceso:

$$P = new\ a((a.Q_1 + b.Q_2)|\bar{a}.0)|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2)$$

- Demostrar que

$$P \equiv new\ a'(((a'.Q'_1 + b.Q'_2)|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2))|\bar{a}')$$

- donde  $a'$  es ligada
- $Q_i' = \{a'/a\}Q_i$ .

- Reduce el ámbito de  $new\ a'$  del último paso

## Bisimulación y relación de congruencia

---

- **Bisimulación:** Dos procesos son equivalentes si tienen el mismo *patrón de comportamiento*.
- Hay que asegurar que si  $P \sim Q$  entonces  $P$  y  $Q$  son intercambiables en *todos los contextos* sin afectar al patrón de comportamiento del conjunto.
- Se puede decir que  $\sim$  es una *relación de congruencia*.
- Es necesario definir un sistema de transiciones etiquetadas que contemple las transiciones externas e internas.

## Transiciones etiquetadas

---

- Las transiciones de procesos,  $P \xrightarrow{\alpha} P'$ , extienden a las relaciones definidas antes del tipo  $P \rightarrow P'$ .
- El caso  $\alpha = \tau$  se corresponde con una reacción
- El caso  $\alpha = a$  o  $\alpha = \bar{a}$  se corresponde con la capacidad de  $P$  para participar en la reacción provista que otro proceso, concurrentemente, puede realizar la transición complementaria
- En este *LTS* no se emplea la noción de congruencia estructural.
- La *alfa-conversión* está permitida

## LTS de procesos concurrentes

---

- El sistema etiquetado  $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$  de procesos concurrentes sobre el conjunto de acciones  $Act = \mathcal{L} \cup \{\tau\}$  tiene:
  - la expresión del proceso  $\mathcal{P}$
  - sus estados.
- Sus transiciones  $\mathcal{T}$  son exactamente aquellas que pueden ser inferidas de las reglas de transición
- La *alfa-conversión* se tiene en cuenta

## Reglas de transición

---

- **SUM<sub>t</sub>**:  $M + \alpha.P + N \xrightarrow{\alpha} P$
- **REACT<sub>t</sub>**: 
$$\frac{P \xrightarrow{\lambda} P' \quad Q \xrightarrow{\bar{\lambda}} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'}$$
- **L – PAR<sub>t</sub>**:  $\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q}$       **R – PAR<sub>t</sub>**:  $\frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P|Q'}$
- **RES<sub>t</sub>**:  $\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{new\ aP \xrightarrow{\alpha} new\ aP'}$  si  $\alpha \notin \{a, \bar{a}\}$
- **IDENT<sub>t</sub>**:  $\frac{\{\vec{b}/\vec{a}\} P_A \xrightarrow{\alpha} P'}{A \langle \vec{b} \rangle \xrightarrow{\alpha} P'}$  si  $A(\vec{a}) \stackrel{def}{=} P_A$